www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECRICOME
Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles EDHEC, ESC Marseille, ESC Reims, ESC Rouen, ICN

CONCOURS D'ADMISSION 1990

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

EXERCICE N° 1

On note E_2 l'espace vectoriel, de dimension 3 sur le corps des réels, constitué de la fonction nulle et des fonctions polynomiales P de degré inférieur ou égal à 2.

1°) a) Déterminer les réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que, pour toute fonction $P \in E_2$:

$$\int_0^1 P(t) \cdot e^t \, dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2 P(1)$$

b) On note Θ la fonction numérique définie par : $\Theta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \ln(1+t)$

Montrer qu'il existe une unique fonction, à déterminer, $P_\Theta \in E_2$ telle que $P_\Theta(x) = \Theta(x)$ pour $x = 0, \frac{1}{2}$ et 1

c) On pose : $I = \int_0^1 \ln(1+t) \cdot e^t \, dt$, $I^* = \int_0^1 P_\Theta(t) \cdot e^t \, dt$

Calculer I^* considérée comme valeur approchée de I.

2°) Soit $\alpha \in]0,1[- \left\{\frac{1}{2}\right\}$. On considère la fonction définie sur [0,1] par :

$$\delta_\alpha(t) = \ln(1+t) - P_\Theta(t) - \frac{t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)}{\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)(\alpha-1)}\left[\ln(1+\alpha) - P_\Theta(\alpha)\right]$$

Constater que δ_α s'annule en 4 points distincts de [0,1].

En déduire, par application du théorème de Rolle, qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\delta_\alpha^{(3)}(c) = 0$

où $\delta_\alpha^{(3)}$ désigne la dérivée 3ième de δ_α, puis que $\ln(1+\alpha) - P_\Theta(\alpha) = \frac{\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)(\alpha-1)}{6} \cdot \frac{2}{(1+c)^3}$

Montrer alors, après avoir étudié les variations de la fonction $\Delta : t \longmapsto t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)$

sur [0,1], que $\forall t \in [0,1]$, $\left|\ln(1+t) - P_\Theta(t)\right| \leqslant \frac{1}{36\sqrt{3}}$

En déduire que : $|I - I^*| < 3 \cdot 10^{-2}$

.../...

EXERCICE N° 2

Les ventes de mini-ordinateurs de jeux, réalisées au cours des fêtes de fin d'année, ont été observées dans un magasin X et ont donné les relevés suivants :

Année t_i	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
Unités vendues n_i (arrondies)	275	400	450	525	550	525	500

On pose :

$$x_i = t_i - 1985 \qquad \text{et} \qquad y_i = \frac{n_i - 400}{25} \qquad \text{avec i variant de } -3 \text{ à } +3$$

I - 1°) Déterminer la droite de régression de y en x.

2°) Représenter sur un même graphique le nuage de points (x_i, y_i), et la droite déterminée en (1°).

II - 1°) Soit p un entier naturel non nul. On considère les fonctions polynomiales définies par :

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_1(x) = x \quad ; \quad P_2(x) = x^2 - \frac{p^2 + p}{3}$$

Montrer que pour tout couple $(k, l) \in \{ (0,1), (0,2), (1,2) \}$, on a : $\sum_{i=-p}^{p} P_k(i) \cdot P_l(i) = 0$

2°) On se propose de rechercher une fonction polynomiale de degré 2 ajustant au mieux le relevé statistique (x_i, y_i) obtenu en introduction.

Reprenant les notations de II-1°, avec p = 3, on note cette fonction sous la forme :

$$P(x) = \alpha P_0(x) + \beta P_1(x) + \gamma P_2(x)$$

et on choisit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ de façon à rendre minimale la quantité : $A = \sum_{i=-3}^{+3} [y_i - P(x_i)]^2$

a) On suppose β et γ fixés arbitrairement ; A peut alors être considérée comme une fonction de α. Montrer que la valeur de α rendant minimale A est

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=-3}^{3} P_0(i) \cdot y_i}{\sum_{i=-3}^{3} (P_0(i))^2}$$

b) On suppose désormais $\alpha = \alpha_0$ et γ fixé, quelle valeur β_0 de β rend A minimale ?

c) Enfin, pour $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \beta_0$. , quelle valeur γ_0 de γ rend A minimale ?

d) Préciser les valeurs numériques de α_0, β_0, γ_0 et représenter sur le graphique du I - 2°) la fonction d'ajustement :

$$P = \alpha_0 P_0 + \beta_0 P_1 + \gamma_0 P_2$$

.../...

PROBLEME

Un article A est commercialisé sous trois présentations différentes. Le problème étudie une suite aléatoire d'achats de cet article et la probabilité que, pour l'une des trois présentations, qui sera, par la suite, appelée présentation P, la fréquence des choix s'étant portés sur elle soit exactement égale à $\frac{1}{3}$.

Première partie - A

On considérera qu'un acheteur de l'article A ne se porte acquéreur que d'un seul article, que les achats sont indépendants entre eux et que le choix d'un client se porte sur la présentation P avec une probabilité p.

1°) On observe une suite de 3n achats, n désignant un entier naturel non nul.

Quelle est la probabilité p_n pour que la fréquence observée de choix de la présentation P soit égale à $\frac{1}{3}$?

2°) On observe une succession d'achats de l'article A et on note q_n la probabilité pour que, avec le $(3n)^{ième}$ achat, on obtienne pour la première fois la fréquence $\frac{1}{3}$ attendue.

a) Montrer que : $p_1 = q_1$

$p_2 = q_1 p_1 + q_2$

b) Etablir que, pour tout entier $n \geqslant 2$: $p_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} + q_n$

c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$: $\sum_{k=1}^{n} (p_k - q_k) = \sum_{(i,j) \in E_n} p_i q_j$

la dernière somme étant étendue à tous les couples (i, j) de l'ensemble :

$$E_n = \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}^2 \;/\; i \geqslant 1 \;,\; j \geqslant 1 \;,\; 2 \leqslant i+j \leqslant n \right\}.$$

Justifier que, pour tout $n \geqslant 2$: $\sum_{(i,j) \in E_n} p_i q_j \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} q_j \right)$

En déduire :

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k - q_k) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} q_j \right) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} (p_k - q_k)$$

3°) a) De quel événement le réel

$$Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n, \qquad \text{où } n \geqslant 1$$

est-il la probabilité ?

b) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} q_n$ est convergente.

c) Etablir, à l'aide de 2° - c, que lorsque la série $\sum_{n \geqslant 1} p_n$ est convergente de somme S, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} Q_n = \frac{S}{S+1}$$

.../...

Deuxième partie - B

1°) On considère la série de terme général p_n défini pour $n \geqslant 1$ par : $p_n = C_{3n}^n \left[x(1-x)^2 \right]^n$

où x désigne un paramètre réel, élément du segment $[0, 1]$ et où C_{3n}^n représente le nombre binomial $\frac{(3n)!}{n!(2n)!}$

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$: $0 \leqslant \frac{C_{3n+3}^{n+1}}{C_{3n}^n} \leqslant \frac{3^3}{2^2}$

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$: $0 \leqslant p_n \leqslant \left[\frac{3^3}{2^2} x(1-x)^2 \right]^{n-1} p_1$

c) Etudier les variations de la fonction : $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{3^3}{2^2} x(1-x)^2$$

et justifier la convergence de la série $\sum p_n$ lorsque $x \neq \frac{1}{3}$.

d) On suppose dans cette question $x = \frac{1}{10}$. Déterminer un majorant de : $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k$

Choisissant comme valeur approchée de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$, une somme partielle : $s_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$

quelle valeur de n peut-on choisir pour que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-2} ?
Calculer cette valeur approchée.

En déduire une valeur approchée de $l = \frac{S}{S+1}$

2°) On suppose $x = \frac{1}{3}$ dans toute cette question où l'on étudie la nature de la série $\sum p_n$.

a) Déterminer un développement limité quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ de la forme :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

b) On pose, pour $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{1}{n}$.

Après avoir déterminé un développement limité de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, quand n tend vers $+\infty$, analogue au précédent, montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$

c) Quelle est la nature de la série $\sum p_n$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail